УДК 530.121

Изложение специальной теории относительности на основе анализа процессов измерения

Леонид Иосифович Филиппов

Лицей «Физико-техническая школа» Академического университета РАН
194021, Санкт-Петербург, ул. Хлопина, д. 8, корп. 3, литера «А»; e-mail: z@tf.ru

Предлагается методика изложения специальной теории относительности, построенная на выводе ее основных положений из мысленного эксперимента. При таком подходе независимость скорости света от движения источника и наблюдателя есть необходимое следствие конечности скорости распространения электромагнитной информации. Это позволяет наглядно показать механизм возникновения релятивистских эффектов; вывести формулы преобразований Лоренца, квадратичного эффекта Допплера, электромагнитного взаимодействия и центробежной силы инерции (принцип Маха).

Ключевые слова: теория относительности, релятивистскаа масса,эффект Допплера.

1. Введение

Задача, которую в конце XIX века поставили пред электродинамикой движущихся тел накопленные экспериментальные данные, была решена Эйнштейном: принцип относительности Галилея был расширен, наряду с механическими явлениями в него вошли электродинамические. Это потребовало постулировать независимость скорости света в вакууме от движения как источника, так и наблюдателя – иначе экспериментальная неразличимость инерциальных систем отсчета была недостижима. За прошедшие 115 лет огромная база всё более точных экспериментальных данных безоговорочно подтвердила и сам этот постулат, и выводы теории.

В теории относительности принцип постоянства скорости света вводится как аксиома; следование этой аксиоме необходимым образом приводит к преобразованиям Лоренца. Физический механизм, обеспечивающий соблюдение постоянства скорости света, то есть анализ процесса измерения, остался за рамками теории; вероятнее всего, Эйнштейну он представлялся очевидным.

В настоящей статье проводится такой анализ. Рассмотрение мысленных экспериментов по измерению длин отрезков и промежутков времени в движущихся друг относительно друга инерциальных системах отсчета позволяет выстроить логически замкнутую схему.

Мысленные эксперименты, предложенные в статье, построены по единой схеме. Основа этой схемы такова. Пусть в некой гипотетической системе отсчета информация о любых физических событиях распространяется в вакууме во всех направлениях с одной скоростью. Находящийся в исходной системе отсчета наблюдатель – также гипотетический – исследует другие, равномерно движущиеся, системы отсчета. Наблюдатели в движущихся системах пользуются для синхронизации часов и получения информации теми реальными сигналами, которые распространяются в исходной системе отсчета изотропно.

Задача заключается в том, чтобы описать результаты экспериментов, проводимых движущимися наблюдателями, по измерению длин отрезков и промежутков времени.

Так как скрупулёзное отслеживание всех математических выкладок требует большого времени, чисто расчётная часть их вынесена в приложения.

2. Теорема сложения скоростей

В статье [8] выведены преобразовния Лоренца. Там же показано следующее: если любой из двух движущихся друг относительно друга наблюдателей будет измерять скорость другого наблюдателя, используя в качестве единицы измерения полученную им же скорость света, результаты у них получатся одинаковым. То же справедливо для *любых* кинематических измерений, так как наблюдатель в каждой системе отсчета использует свои эталоны длины и времени. Данная логика и приводит к релятивизму. Применим тот же подход для вывода закона сложения скоростей.

Три системы отсчета, обозначенные как «1», «2» и «3», движутся вдоль одной прямой с точки зрения исходной системы отсчета, и их скорости равны V_1, V_2 и V_3 соответственно. При этом скорость системы номер 2, измеренная наблюдателем в системе номер 1, равна u, а скорость «номера 3», измеренная «номером 2», равна w.

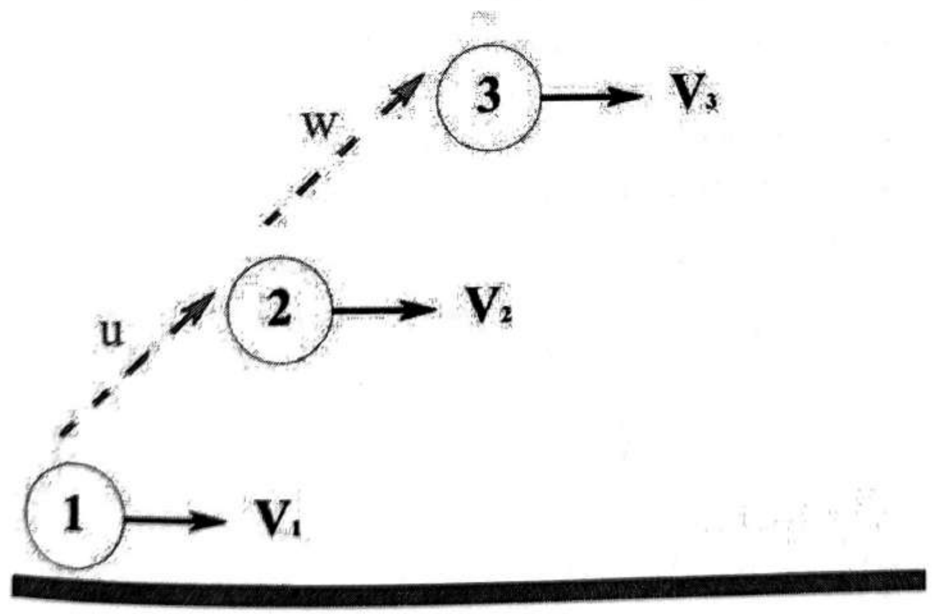

Рисунок 1.

Расчеты – см. Приложение 1

Получаем:

$$V_{3-1} = (V_3 - V_1) \cdot \left(\frac{c^2 - V_1^2}{c^2 - V_3 V_1} \right)$$

$$V_{3-1} = (V_3 - V_2 + V_2 - V_1) \cdot \left(\frac{c^2 - V_1^2}{c^2 - V_3 V_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{w}{1 + \dfrac{w V_2}{c^2 - V_2^2}} + \frac{u}{1 + \dfrac{u V_1}{c^2 - V_1^2}} \right) \cdot \left(\frac{c^2 - V_1^2}{c^2 - V_3 V_1} \right). \qquad (1)$$

Результирующая скорость, получающаяся при сложении двух скоростей, каждая из которых меньше c, всегда меньше c.

Причина этого очевидна: система отсчета движется со скоростью, не превышающей – по условию – скорость света, а наблюдатели из других систем измеряют скорость ее движения; разумеется, полученные ими результаты не превосходят скорость света в их системах отсчета.

Если бы в природе существовал доступный наблюдению объект, имеющий сверхсветовую скорость, то в точке «финиша» он оказывался бы раньше, чем световой сигнал, выпущенный одновременно с ним. Нарушения причинно-следственной связи здесь нет. Рассмотренные соотношения (как и СТО) не «запрещают» существование скорости, превышающей c, и никакое физическое явление (сокращение физических размеров твердого тела или рост инертности с ростом скорости) за этими соотношениями не стоит, это чисто приборные эффекты: природа «выбрала» в качестве своего прибора электромагнитное излучение, и всё дело лишь в конечности скорости передачи информации.

В [8] было показано следующее: при замене в системах отсчета «1» и «2» времени t и координаты x на

$$\tilde{t} = \left(\sqrt{1 - \frac{V_1^2}{c^2}} \right) t, \quad \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V_1^2}{c^2}}} x,$$

$$\tilde{t}' = \left(\sqrt{1 - \frac{V_2^2}{c^2}} \right) t', \quad \tilde{x}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V_2^2}{c^2}}} x'$$

соответственно получаем из формул

$$u_{21}=\left(V_2-V_1\right)\cdot\left(\frac{c^2-V_1^2}{c^2-V_1V_2}\right);\quad u_{12}=\left(V_2-V_1\right)\cdot\left(\frac{c^2-V_2^2}{c^2-V_1V_2}\right)$$

формулы для относительных скоростей:

$$\tilde{u}_{21}=\frac{u_{21}}{1-\frac{V_1^2}{c^2}}=\frac{V_2-V_1}{1-\frac{V_1V_2}{c^2}}=V\,;\quad \tilde{u}_{12}=\frac{u_{12}}{1-\frac{V_2^2}{c^2}}=\frac{V_2-V_1}{1-\frac{V_1V_2}{c^2}}=V$$

– это относительная скорость систем отсчета в СТО. Аналогично, преходя в формуле (1) к собственным времени и координате системы «1», получаем закон сложения скоростей Эйнштейна.

3. Соответствие реальности

Покажем, что полученные в пределах описанной выше теоретической схемы физические законы соответствуют системе аксиом, сформулированных Эйнштейном.

Наблюдатели, действующие в принятых условиях, проводя измерения скорости света и относительной скорости равномерно движущихся систем, получат результаты, приводящие их к следующей гипотезе: *неразличимость равномерно движущихся систем отсчета, то есть принцип относительности, распространяющийся на любые опыты, включая опыты со светом; а значит – и принцип постоянства скорости света: при измерениях она получается одинаковой, независимо от движения источника или наблюдателя.*

В рамках этой гипотезы можно провести следующие теоретические рассуждения.

Исключив несуществующего «абсолютного» наблюдателя, рассмотрим новый, реально осуществимый, эксперимент.

Скорость света с точки зрения системы отсчета Е равна *c*. Мимо наблюдателя Е, находящегося в центре неподвижного отрезка длиной L, со скоростью *u* пролетает отрезок, концы которого соприкасаются с концами отрезка в системе Е одновременно (световые сигналы от соприкосновений приходят в центр отрезка в один и тот же момент). Картинка с точки зрения наблюдателя в системе Е такова:

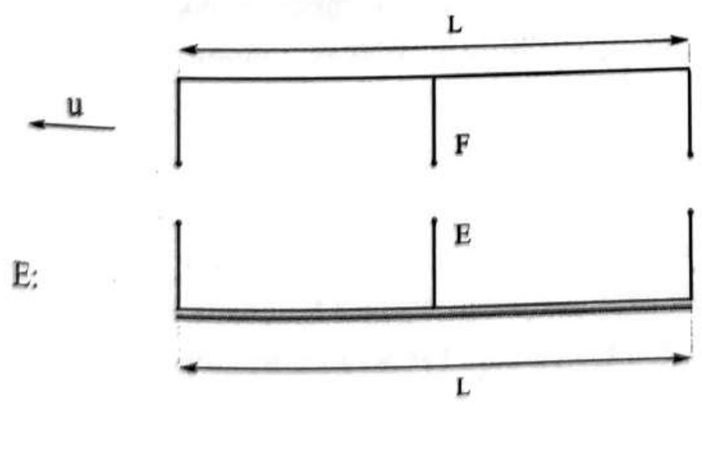

Рисунок 2.

этого отрезка, c – скорость света: ни от каких других параметров функция преобразования длины зависеть не может. В нашу систему аксиом входит положение об однородности пространства (также экспериментально подтвержденное), поэтому выбрана линейная зависимость.

Продолжая ту же логику, рассмотрим два события, *одноместные в системе отсчета F*. Если между ними по часам F прошло время Δt_F, то по часам E между этими же событиями прошло *большее* время: $\Delta t_E = \Delta t_F \cdot \beta(u;c)$.

Доказывается это следующим образом: события, одноместные в F, оставляют на отрезке, расположенном в системе E отметки, расстояние между которыми с точки зрения F равно $\Delta t_F \cdot u$. Так как эти отметки ограничивают отрезок, неподвижный в системе E, то длина его, измеренная наблюдателем F, меньше, чем она же, измеренная наблюдателем E, в $\beta(u;c)$ раз. То есть, длина его в системе E равна $\Delta t_F \cdot u \cdot \beta(u;c)$. А так как скорость движения точки, расположенной в системе F, в которой произошли эти два события, измеренная E, равна u, следовательно, промежуток времени, который эта точка затратила на преодоление данного отрезка равен $\Delta t_F \cdot \beta(u;c)$.

Применяя полученное соотношение к времени рассогласования t_{paccE} между двумя событиями, одноместными в системе отсчета F, получаем: $t_{paccF} = t_{paccE} \cdot \dfrac{1}{\beta(u;c)}$.

Далее, с точки зрения наблюдателя F отрезок в системе E короче, чем отрезок в его системе на $u \cdot t_{paccF}$. При этом длина системы E с точки зрения F равна $\dfrac{L}{\beta(u;c)}$, то есть длина отрезка в системе F с точки зрения самой системы F равна:

$$\frac{L}{\beta(u;c)} + u \cdot t_{paccF} = \frac{L}{\beta(u;c)} + u \cdot \left(\frac{L}{u} \cdot \frac{1}{\dfrac{c^2}{u^2} - 1} \right) \cdot \frac{1}{\beta(u;c)}.$$

В то же время длина отрезка в системе F с точки зрения системы E равна L, а отношение длин «(длина отрезка в F с т.зр. F)/(длина отрезка в F с т.зр. E)» – это и есть $\beta(u;c)$. Подставляем:

$$\beta(u;c) = \frac{1}{\beta(u;c)} + \frac{1}{\dfrac{c^2}{u^2} - 1} \cdot \frac{1}{\beta(u;c)}, \text{ откуда } \beta(u;c) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, *оставаясь в рамках принятой аксиоматики*, мы получаем преобразования Лоренца.

Рассуждает наблюдатель E. Точка F движется влево, то есть навстречу сигналу от соприкосновения левых концов и удаляясь от сигнала справа. Сигналы, пришедшие к точке E одновременно, к точке F придут с рассогласованием во времени. Это рассогласование, измеренное наблюдателем E, равно

$$t_{paccE} = \left(\frac{L}{2(c-u)} - \frac{L}{2(c+u)} \right) = \frac{L}{u} \left(\frac{1}{\frac{c^2}{u^2} - 1} \right).$$

Из того факта, что сигнал слева приходит к наблюдателю F раньше, чем сигнал справа (факт этот – абсолютный), сам наблюдатель F, ***который тоже рассуждает в рамках принятых аксиом***, может сделать только один вывод: отрезок в движущейся системе E короче, чем отрезок в его системе. С точки зрения системы отсчета F, в которой часы синхронизированы световыми импульсами, картинка выглядит так:

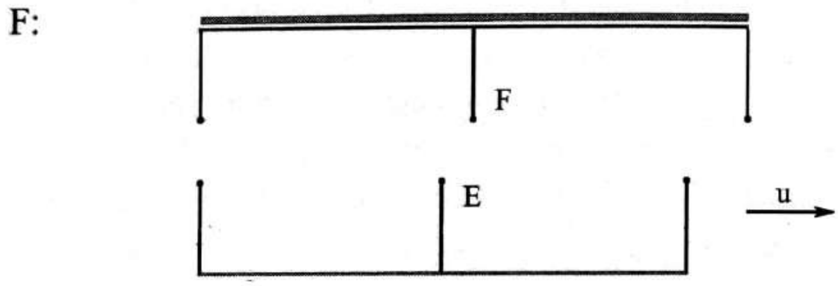

Рисунок 3.

(Чтобы провести все эти рассуждения, реальный наблюдатель располагающийся в системе F, не нужен – достаточно объективного факта временного рассогласования прихода сигналов в середину системы F, в остальном наблюдатель E может рассуждать теоретически.)

Продолжая строить логику на гипотезе о том, что все равномерно движущиеся системы отсчета равноправны, мы должны теперь найти такие преобразования для длин отрезков и промежутков времени, которые в рамках данной аксиоматики непротиворечиво описывали бы имеющуюся экспериментальную ситуацию: наблюдатель в одной из систем видит, что «покоящийся» и «движущийся» отрезки равны, а наблюдатель в другой системе – что длины тех же отрезков различны: «движущийся» отрезок короче, чем отрезок, покоящийся в его системе отсчета. При такой постановке задача имеет единственное решение: отрезок, длина которого в покое равна L, будучи измеренным в движении, имеет *меньшую* продольную длину: $\frac{L}{\beta(u;c)}$; ($\beta > 1$), где u – скорость движения

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0^*}{1 + \frac{V}{c}}.$$

Следовательно, с точки зрения исходной системы отсчета, вся излученная энергия:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon_0^*}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Существенное замечание

Уже само по себе требование соблюдения законов сохранения необходимым образом приводит к зависимости массы тела от его скорости. В самом деле, каждая из излучаемых «порций» света обладает как энергий, так и импульсом (экспериментальный факт). В результате симметричного испускания двух идентичных «порций» света скорость излучающего тела измениться не может. Следовательно, если мы хотим, чтобы импульс излучающего тела изменился на величину, равную разности импульсов «порций» излучения, придется потребовать, чтобы изменилась масса этого тела. Именно такой логикой пользовался Эйнштейн. Добавив к этой логике преобразования Лоренца, из которых выводится формула преобразования энергии «порции» света от одной системы отчета к другой, Эйнштейн получил приближенную формулу зависимости массы тела от его скорости. Покажем, что в использовании преобразований Лоренца нет необходимости, достаточно того факта, что энергия и импульс электромагнитного излучения связаны соотношением $P = \frac{\varepsilon}{c}$.

Итак, запишем закон сохранения импульса для рассматриваемого мысленного эксперимента:

$$mV = (m - \Delta m) \cdot V + \frac{\varepsilon_2}{c} - \frac{\varepsilon_1}{c}.$$

Отсюда:

$$\Delta m \cdot V = \frac{\varepsilon_2}{c} - \frac{\varepsilon_1}{c} = \frac{\varepsilon_0^*}{c\left(1 - \frac{V}{c}\right)} - \frac{\varepsilon_0^*}{c\left(1 + \frac{V}{c}\right)} = \frac{2\varepsilon_0^* \cdot V}{c^2 - V^2}.$$

И получаем:

$$\Delta m = \frac{2\varepsilon_0^*}{c^2 - V^2} = \frac{2\varepsilon_0^*}{c^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{c^2} = \frac{\varepsilon_{излучения}}{c^2};$$

изменение массы тела при излучении света равно излученной энергии, деленной на квадрат скорости света. Это точная формула. Так как при выводе использовались более или менее

4. Динамика. Зависимость инертной массы движущегося тела от его скорости

Воспользуемся мысленным экспериментом, подобным тому, какой был предложен Эйнштейном в статье «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии» [2].

Пусть некое тело, движущееся относительно системы отсчета, в которой расположен наблюдатель, в один и тот же момент излучает две идентичных «порции» света в противоположных направлениях. В системе отсчета, исходно связанной с рассматриваемым телом, оно неподвижно как до излучения, так и после него (требование симметрии). Пусть энергия каждой из двух излученных «порций» в этой системе отсчета равна ε_0. В лабораторной системе отсчета тело до и поле излучения движется со скоростью V, а энергии излученных «порций» света, измеренные в этой системе, будут равны ε_1 (свет, излученный «против хода» тела) и ε_2 («по ходу»).

Чтобы записать для этого случая закон сохранения энергии, следует учесть работу силы отдачи, совершаемую за время акта излучения: $\varepsilon_2 = \varepsilon_0^* + A_2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^* - A_1$. Здесь ε_0^* – измеренная в лабораторной системе отсчета энергия, которой обладал бы излученный телом свет, если бы не было отдачи. В случае, когда рассматриваемые гипотетические «порции» электромагнитного излучения являются квантами света, величина ε_0^* – это разность между уровнями энергии движущегося атома до излучения и после него, измеренная в лабораторной системе отсчета. По какому закону величина ε_0^* зависит от величины ε_0 (то есть от разности между боровскими уровнями энергии атома в покое) и от скорости V, для данной задачи значения не имеет.

При рассмотрении в лабораторной системе отсчета для каждой из излученных «порций» света работа отдачи равна произведению импульса, уносимого «порцией», на скорость движения излучающего тела. В то же время известно, что импульс любой ограниченной «порции» электромагнитного излучения равен энергии этой «порции», деленной на скорость света:

$$A_2 = P_2 \cdot V = \frac{\varepsilon_2}{c} \cdot V\,; \quad A_1 = P_1 \cdot V = \frac{\varepsilon_1}{c} \cdot V\,.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0^* + \frac{\varepsilon_2}{c} \cdot V\,.$$

То есть

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0^*}{1 - \frac{V}{c}}.$$

Аналогично:

произвольные предположения, а именно известные из механики законы сохранения энергии и импульса были распространены на взаимодействие твердого тела и электромагнитного излучения, кроме того работа силы отдачи при излучении света вычислена с использованием закона, известного опять же из механики твердых тел, то полученная формула нуждается в экспериментальной проверке. Точнее, нуждалась бы, если бы за 115 лет, прошедшие с момента опубликования работы Эйнштейна [2], эта закономерность не была многократно доказана на опыте. Верным оказалось и более сильное утверждение: масса тела может быть превращена в энергию электромагнитного излучения целиком, как если бы тело было «сделано из света»: и в этом случае соотношение $\varepsilon_{излучения} = m_0c^2$ останется справедливым. Предположение Эйнштейна о том, что электромагнитное излучение переносит инерцию между излучающими и поглощающими телами, подтвердилось.

5. Квадратичный эффект Допплера

Формула для квадратичного эффекта Допплера, полученная Эйнштейном, неоднократно и с высокой точностью подтверждена на опыте – начиная с опыта Айвса и Стилуэлла в 1938 г., в котором исследовалось излучение атомов водорода [3]. Измерить частоту света, излучаемого в направлении, строго перпендикулярном скорости движения атома, не представляется возможным, поэтому во всех экспериментах этого типа частота излучения – «по ходу» движения атома и частота излучения «против хода» сравниваются с частотой, излучаемой таким же атомом «в покое».

Чтобы построить теоретическую схему эффекта Допплера, будем исходить из квантового характера излучения (рассматривать отдельные возбужденные атомы водорода, спектр излучения которых в данном случае строго линейчатый, как источники непрерывных электромагнитных волн нет никаких оснований). Релятивистскую теорию квадратичного эффекта Допплера впервые предложил Э. Шрёдингер в 1922 году в своей статье «Эффект Допплера и постулаты Бора для излучаемых частот» [4]. Эта теория опирается не только на квантовые представления Бора об излучении атомом света, но и на формулу Эйнштейна для релятивистского преобразования массы покоя.

От мысленного эксперимента с одновременным симметричным излучением двух «порций» света в противоположных направлениях переходим к описанию реального опыта, в котором движущийся атом излучает квант света с переходом с одного боровского энергетического уровня на другой. Рассматриваем случай излучения света в направлении движения атома.

В новых обозначениях:

$$E_0 = m_0c^2,$$

где E_0 – энергия покоя атома, m_0 – его масса покоя. Тогда полная энергия атома в движении:

$$E_{движ} = E_0 + \frac{m_0 V^2}{2} = m_0 c^2 \cdot \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) = E_0 \cdot \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right).$$

Далее для простоты записи индекс «0» опускаем и будем энергию покоя обозначать просто «E». Пусть боровские уровни энергии атома в покое E_1 и E_2, причем $E_1 > E_2$ (если бы не возникающая при излучении отдача, исходно покоящийся атом излучал бы квант света с энергией $h\nu = E_1 - E_2$).

Излучение движущегося атома, закон сохранения энергии:

$$h\nu = E_1 \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) - E_2 \cdot \left(1 + \frac{V_2^2}{2c^2}\right).$$

Здесь V_1 и V_2 – скорости атома до и после излучения соответственно (их различие – также следствие отдачи). Наблюдатель располагается в системе отсчета, в которой скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме изотропна и равна c.

Подробные расчеты – см. Приложение 2

В итоге имеем: выражение для частоты света, измеренной наблюдателем в исходной системе отсчета, при условии, что источник света движется относительно нее со скоростью V:

$$\nu = \nu_{пок} \cdot \frac{1 - \frac{V^2}{2c^2}}{1 - \frac{V}{c}}. \tag{2а}$$

Для случая, когда свет испускается в направлении, противоположном скорости источника:

$$\nu = \nu_{пок} \cdot \frac{1 - \frac{V^2}{2c^2}}{1 + \frac{V}{c}}. \tag{2б}$$

В опыте Айвса и Стилуэлла, а также во всех последующих экспериментах проверялась формула релятивистского эффекта Допплера для движущегося источника:

$$\nu = \nu_{пок} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\varphi}.$$

Все экспериментаторы при расчетах принимали *приближение* $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 1 - \frac{V^2}{2c^2}$, что при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (в опытах сравниваются длины волн, излучаемые именно в этих двух направлениях) приводит к формулам (2а) и (2б).

Итак, предложенный подход, основанный на анализе передачи информации световыми сигналами, позволяет не только наглядно получить группу Лоренца (а тем самым и все кинематические релятивистские эффекты), но и строго описать такой ключевой эксперимент, как опыт Айвса и Стиллуэлла.

* * *

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Простейший случай: лабораторная система отсчета совпадает с исходной, скорости параллельны. Как было показано выше, если с точки зрения исходной системы система F имеет скорость V_1, а с точки зрения F система E имеет скорость

$$u_1 = (V_2 - V_1) \cdot \left(\frac{c^2 - V_1^2}{c^2 - V_2 V_1} \right),$$

то с точки зрения исходной системы отсчета система E имеет скорость V_2, $V_2 > V_1$).

Выражая V_2 через V_1 и u_1, получаем:

$$V_2 = V_1 + \frac{u_1}{1 + \dfrac{u_1 V_1}{c^2 - V_1^2}}.$$

Далее, «в обратную сторону»: если с точки зрения исходной системы система E имеет скорость V_2, а точки зрения E система F – скорость

$$u_2 = -(V_2 - V_1) \cdot \left(\frac{c^2 - V_2^2}{c^2 - V_2 V_1} \right),$$

то с точки зрения исходной системы система F имеет скорость V_1, $V_1 < V_2$).

Выражаем V_1 через V_2:

$$V_1 = V_2 + \frac{u_2}{1 + \dfrac{u_2 V_2}{c^2 - V_2^2}}.$$

Итак,

$$V_{нов} = V + \frac{u}{1 + \dfrac{uV}{c^2 - V^2}}. \qquad (3)$$

Покажем, что результирующая скорость, получающаяся при сложении двух скоростей, каждая из которых меньше c, всегда меньше c.

Положив $V = c - \chi$, $u = c_1 - \varepsilon$, где χ и ε обе положительны и меньше c, имеем:

$$V = c - \chi = c(1-\mu);\; u = c\cdot(1-(1-\mu)^2-\lambda),$$

где $\mu = \dfrac{\chi}{c}$; $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{c}$;

$$V_{нов} = V + \frac{u}{1+\dfrac{uV}{c^2-V^2}} = \frac{c^2(u+V)-V^3}{c^2-V^2+uV} = c\cdot\frac{(1-\lambda)+(1-\mu)-(1-\mu)^2-(1-\mu)^3}{(1-\lambda)+(1-\mu)-(1-\mu)^2-(1-\mu)^3+\mu\lambda} < c.$$

Полагая в этом выражении $\mu = 0$ или $\lambda = 0$, то есть $V = c$ или $u = c_1$, получаем в обоих случаях: $V_{нов} = c$. Как видим, скорость света, сложенная со скоростью, которая меньше скорости света, не может быть изменена.

Тот же результат можно получить, прямо подставляя в формулу сложения скоростей значение $u = c_1$ или $V = c$. При $u = c_1 = c\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)$ получаем $V_{нов} = c$ для любого значения V.

Далее, более общий случай: лабораторная система отсчета не совпадает с исходной. Три системы отсчета, обозначенные как «1», «2» и «3», движутся вдоль одной прямой с точки зрения исходной, и их скорости, измеренные наблюдателем в исходной, равны V_1 , V_2 и V_3 соответственно. При этом скорость системы номер 2, измеренная наблюдателем в системе номер 1, равна u , а скорость «номера 3», измеренная «номером 2», равна w .

Из формулы (3):

$$V_2 = V_1 + \frac{u}{1+\dfrac{uV_1}{c^2-V_1^2}} \quad \text{и} \quad V_3 = V_2 + \frac{w}{1+\dfrac{wV_2}{c^2-V_2^2}}.$$

В то же время мы можем записать выражение для скорости системы «3», измеренной наблюдателем в системе «1»:

$$V_{3-1} = (V_3 - V_1)\cdot\left(\frac{c^2-V_1^2}{c^2-V_3V_1}\right).$$

Выразить эту величину только чрез u и w невозможно, так как это означало бы ее независимость от движения рассматриваемых систем отсчета относительно исходной. Тем не менее общая формула для V_{3-1}, выраженная через относительные скорости, нагляднее и удобнее для анализа.

Итак:

$$V_{3-1} = (V_3 - V_2 + V_2 - V_1)\cdot\left(\frac{c^2-V_1^2}{c^2-V_3V_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{w}{1+\dfrac{wV_2}{c^2-V_2^2}} + \frac{u}{1+\dfrac{uV_1}{c^2-V_1^2}}\right)\cdot\left(\frac{c^2-V_1^2}{c^2-V_3V_1}\right).$$

В случае, когда система «1» совпадает с исходной, то есть $V_1 = 0$, это выражение переходит в уже известную формулу).

Далее, при $w = c_2 = c \cdot \left(1 - \frac{V_2^2}{c^2}\right)$, то есть в случае, когда система «3» – это свет, а значит $V_3 = c$, получаем:

$$V_{3-1} = c \cdot \left(1 - \frac{V_1^2}{c^2}\right).$$

Формула для V_{3-1}, при сложении скоростей, каждая их которых меньше скорости света в той системе отсчета, где она измеряется, дает результат, который всегда меньше скорости света. Полагаем скорость

$$w = c \cdot \left(1 - \frac{V_2^2}{c^2}\right) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Это означает, что система «3» движется со скоростью, меньшей, чем скорость света, и с точки зрения исходной системы отсчета ее скорость $V_3 = c - \zeta$, где ζ – некое положительное число. Подставляя эти значения в формулу для V_{3-1} и полагая также $V_1 < c$ и $V_2 < c$ (что автоматически влечет $u < c_1$), получаем в результате выражение для скорости V_{3-1}.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Излучение движущегося атома, закон сохранения энергии:

$$h\nu = E_1 \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) - E_2 \cdot \left(1 + \frac{V_2^2}{2c^2}\right) \tag{4.1}$$

Закон сохранения импульса: $m_1 V_1 = m_2 V_2 + \frac{h\nu}{c}$. При этом

$$m_1 = \frac{E_1}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right); \; m_2 = \frac{E_2}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{V_2^2}{2c^2}\right),$$

следовательно:

$$\frac{E_1 V_1}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) = \frac{E_2 V_2}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{V_2^2}{2c^2}\right) + \frac{h\nu}{c},$$

откуда:

$$h\nu = \frac{E_1 V_1}{c} \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) - \frac{E_2 V_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{V_2^2}{2c^2}\right) \tag{4.2}$$

Вычитая (4.2) из (4.1), получаем:

$$E_1\left(1+\frac{V_1^2}{2c^2}\right)\left(1-\frac{V_1}{c}\right)=E_2\left(1+\frac{V_2^2}{2c^2}\right)\left(1-\frac{V_2}{c}\right).$$

(Физический смысл этого равенства: разность $E-pc$ при излучении остается неизменной.) Выразив отсюда E_2 и подставив в (4.1), получаем:

$$h\nu=E_1\cdot\left(1+\frac{V_1^2}{2c^2}\right)\cdot\left(\frac{V_1-V_2}{c-V_2}\right). \tag{4.3}$$

Проведем те же рассуждения применительно к системе отсчета, в которой рассматриваемый атом до излучения светового кванта находился в покое. Эта система движется относительно исходной со скоростью V_1, и скорость света, измеренная в ней, равна

$$c_1=c\cdot\left(1-\frac{V_1^2}{c^2}\right).$$

Скорость атома до излучения в этой системе отсчета равна нулю, скорость после излучения обозначим W_1 (ее направление противоположно направлению излученного светового кванта).

По-прежнему полагаем верными закон сохранения энергии и закон сохранения импульса при излучении света, в какой бы системе отсчета ни находился наблюдатель. Следовательно, все проделанные выше рассуждения можно провести для наблюдателя, располагающегося в системе отсчета, связанной с атомом до излучения. Обозначим частоту излученного светового кванта, измеренную в этой системе отсчета, $\nu_{пок}$.

Проделав приведенные выше выкладки для системы, движущейся со скоростью V_1 (при этом в законе сохранения импульса следует учесть направление скорости W_1), получаем аналог выражения (4.3):

$$h\nu_{пок}=E_1\left(\frac{W_1}{c_1+W_1}\right).$$

Выполнение закона сохранения энергии означает также следующее: атом, покоящийся в исходной системе отсчета и идентичный ему атом, покоящийся в системе отсчета, движущейся относительно исходной со скоростью V_1, при переходе из состояния с энергией E_1 в состояние E_2 излучают световые кванты, частоты которых, измеренные каждая в своей системе, будут равны. Обозначая «скорость отдачи» в исходной системе отсчёта за W_0 и проделывая те же выкладки, получаем для исходной:

$$h\nu_{пок}=E_1\left(\frac{W_0}{c+W_0}\right).$$

Найдем соотношение между «скоростями отдачи» в двух системах отсчета: $\frac{W_1}{W_0}$. Учитывая, что $W_1, W_0 << c$, можно с огромной точностью полагать

$$h\nu_{пок} = E_1\left(\frac{W_1}{c_1}\right) = E_1\left(\frac{W_0}{c}\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{c_1}{c} = \left(1 - \frac{V_1^2}{c^2}\right).$$

Далее, используем формулу сложения скоростей. Подставляя в нее величину скорости W_1 (с учетом направления этой скорости) получаем:

$$V_2 = V_1 - \frac{W_1}{1 - \dfrac{W_1V_1}{c^2 - V_1^2}}.$$

Выражаем отсюда $V_2 - V_1$ и подставляем в (4.3):

$$h\nu = E_1 \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{c - V_2}\right) \cdot \frac{W_1}{1 - \dfrac{W_1V_1}{c^2 - V_1^2}} =$$

$$= \left(E_1 \cdot \frac{W_0}{c}\right) \cdot \frac{c}{W_0} \cdot \frac{W_1}{1 - \dfrac{W_1V_1}{c^2 - V_1^2}} \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{c - V_2}\right) =$$

$$= h\nu_{пок} \cdot \frac{c}{c - V_2} \cdot \frac{W_1}{W_0} \cdot \left(1 + \frac{V_1^2}{2c^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{W_1V_1}{c^2 - V_1^2}} =$$

$$= h\nu_{пок} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{V_2}{c}}\left(1 - \frac{V_1^2}{c^2}\right).$$

Для определения измеряемой в реальном эксперименте частоты света полученная формула может быть сделана более простой. Учтем тот факт, что $W_1 << c$. Это означает, что скорости V_1 и V_2 при измерении практически неразличимы. Поэтому, упрощая, заменим в формуле обе эти величины на «V». Далее, по той же причине отличие сомножителя

$$\frac{1}{1 - \dfrac{W_1V_1}{c^2 - V_1^2}}$$

от единицы пренебрежимо мало влияет на результат. Кроме того, отбрасывая слагаемое четвертого порядка, полагаем

$$\left(1-\frac{V_1^2}{c^2}\right)\cdot\left(1+\frac{V_1^2}{2c^2}\right)=1-\frac{V^2}{2c^2}.$$

В итоге получается выражение для частоты света, измеренной наблюдателем в исходной системе отсчета, при условии, что источник света движется относительно него со скоростью V:

$$\nu=\nu_{пок}\cdot\frac{1-\dfrac{V^2}{2c^2}}{1-\dfrac{V}{c}}.$$

Мы рассмотрели случай испускания светового кванта в направлении движения атома. Для случая, когда свет испускается в направлении, противоположном скорости источника, проделанные выше выкладки дают:

$$\nu=\nu_{пок}\cdot\frac{1-\dfrac{V^2}{2c^2}}{1+\dfrac{V}{c}}.$$

Заключение

Как уже было сказано, теория относительности дала ответы на вопросы, которые были поставлены пред физикой данными экспериментов. Механика Галилея-Ньютона приводила к неразрешимым противоречим: объяснить с ее помощью наличие звездной аберрации, опыт Физо и опыт Майкельсона-Морли было невозможно. Снять это противоречие позволил постулат независимости скорости света в вакууме от движения источника и наблюдателя. В дальнейшем экспериментальные данные, полученные в лабораториях, с высокой точностью подтвердил правоту СТО. Ключевым и наиболее убедительным из таких опытов был опыт Айвса и Стиллуэлла.

В настоящей статье описаны мысленные эксперименты, построенные на единственном исходном положении: о существовании системы отсчета, в которой скорость света в вакууме изотропна. Полученные результаты совпадают с результатами теории относительности.

Литература

1. *A. Einstein*, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper," Annalen der Physik 322 (10), 891–921 (1905).
2. *A. Einstein*, "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?," Annalen der Physik 323 (13), 639–641 (1905).
3. *H.E. Ives and G.R. Stilwell*, "An experimental study of the rate of a moving atomic clock," Journal of the Optical Society of America 28, 215-219 (1938).
4. E. Schrödinger, "Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung," Physikalische Zeitschrift, 23, 301-303 (1922).
5. *Паули В.* «Теория относительности» 27-28 (М.: Наука 1983).
6. *Мандельштам Л.И.* «Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике» Под ред. С.М. Рытова (М.: Наука, 1972).
7. *Логунов А.А.* «Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы» (М.: Наука, 1987).
8. *Филиппов Л.И.* «К вопросу о выводе преобразований Лоренца», Физическое образование в вузах, 26(1), 16-29 (2020).